Case Studies van CWI-Onderzoek[1]

Prof. L.G.L.T. Meertens

Chef afdeling Algoritmiek en Architectuur CWI

Dames en Heren,

Wat ik u ga aanbieden, is een boeket veldbloemen die ik op het onderzoeksveld geplukt heb. Ik heb een aantal gevallen geselecteerd, want ik kan uiteraard niet in dit beperkt tijdsbestek laten zien wat hier allemáál gebeurt. Daarom moest ik selectiecriteria hebben. Ik heb er in de eerste plaats op geselecteerd dat het inderdaad om onderzoek ging en niet om het soort gevallen waarbij iemand binnenkomt die een probleem voorlegt waarop de onderzoeker zegt: 'O, dat staat daar in dat boek, hoofdstuk zoveel, vers zoveel, dat is precies uw geval'. Het moest dus echt om onderzoek gaan. Een tweede criterium was dat de motivering van het onderzoek extern moest zijn en niet omdat de onderzoeker het zelf zo leuk vond vanuit de dynamiek van het onderzoek om daar eens naar te kijken. Een derde criterium dat ik gehanteerd heb is dat het om recent onderzoek moest gaan en een vierde dat het leuk moest zijn. Nu weet ik natuurlijk niet wat u leuk vindt, dus heb ik dat maar zo gehanteerd dat ik heb uitgekozen wat ik zelf leuk vind.

1. Stroming rond een vleugel

Bij het eerste onderzoek gaan we vliegen. Het gaat om luchtstromingen rond een vleugel. Dat is op zich een bekend probleem, waar veel werk aan is gedaan. Het gaat erom hoe dat op een handige manier aangepakt kan worden. Dit is een project dat gehonoreerd wordt door de Stichting voor de Technische Wetenschappen (STW). Het is verricht in samenwerking met het Nationaal Lucht- en Ruimtevaartlaboratorium (NLR).

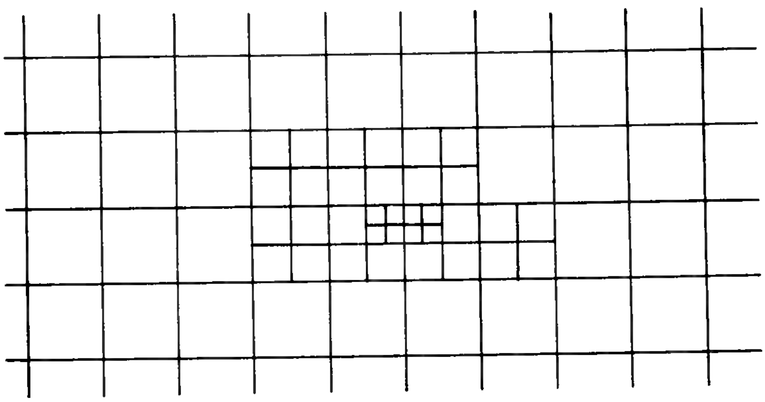
1. Dit is een redactioneel lichtelijk bewerkte weergave van de uitgesproken tekst.

We kennen de vergelijkingen voor de stationaire stroming rond een vleugel. Het onderzoek gaat om het stationaire geval. Na een tijdje stelt zich een soort evenwicht in en de vraag is: hoe zit dat evenwicht in elkaar? Als je dat weet kun je uitspraken doen over het dragend vermogen van die vleugel.

Deze vergelijkingen worden numeriek opgelost. Je maakt een rooster van puntjes en je berekent de waarde in die puntjes (discretisering). Er zijn verschillende methoden. Je kunt het 'eerste-orde' doen, dat is de meest voor de hand liggende manier. Maar dat heeft een aantal bezwaren: er is een behoorlijk fijn rooster nodig om het goed uit te kunnen rekenen en de discontinuïteiten worden niet zo mooi behandeld. Deze bezwaren verdwijnen bij 'tweede-orde' methoden. Maar daaraan kleven nieuwe bezwaren, namelijk stabiliteitsproblemen en iets wat in het Engels 'wiggle' heet (='gewriemel' of 'gewiebel').

Laten we even naar die roosters kijken. Als die een bepaalde vaste maaswijdte hebben, dan kan dat onvoordelig zijn. Stel dat u een net van correspondenten wilt opzetten in Nederland. Als u die correspondenten gelijkmatig over het land verdeelt, dan doet u iets onverstandigs: er zijn er te veel op de Veluwe en te weinig in Amsterdam. In gebieden waar weinig gebeurt, heb je eigenlijk niet zoveel informatie nodig, maar op die paar punten waar het gebeurt, heb je veel informatie nodig.

Dit bezwaar is te ondervangen met een vrij nieuwe methode waar hier op het CWI veel werk aan is verricht: een 'multirooster'-methode, die de maaswijdte laat verspringen. Ik heb hier een heel eenvoudig geval genomen, waarbij de maaswijdte gehalveerd kan worden; waar het erg interessant is zo nodig een aantal malen (zie figuur 1).



FIGUUR 1. *De multi-roostermethode wordt gekenmerkt door roosters met verspringende maaswijdte*

Voor juist het soort vergelijkingen waar het bij die vliegtuigvleugels om gaat (Euler-vergelijkingen) is op het CWI heel recent, vorig jaar, een zeer efficiënte methode ontwikkeld. Dat is echter helaas een eerste-orde methode en we hebben zojuist gezien dat we voor die vleugel eigenlijk tweede-orde zouden willen rekenen.

Toen kwam er een idee. Stel, we hebben een eerste-orde stelsel, vereenvoudigd weergegeven door $N_1 = 0$. De onbekenden zitten in het linkerlid en we kunnen dit stelsel dan op de roosterpunten op de een of andere manier oplossen. Ook bij het tweede-orde stelsel $N_2 = 0$ zitten links weer de onbekenden. Als zowel N_1 als $N_2 = 0$, dan zou het verschil ook $=0$ moeten zijn. Nu stel ik hier een nieuwe vergelijking op: $N'_1 = N_1 - N_2$. Als het goed is, is dat dus $=0$, dus het zelfde als het oorspronkelijke stelsel. Zie ook figuur 2.

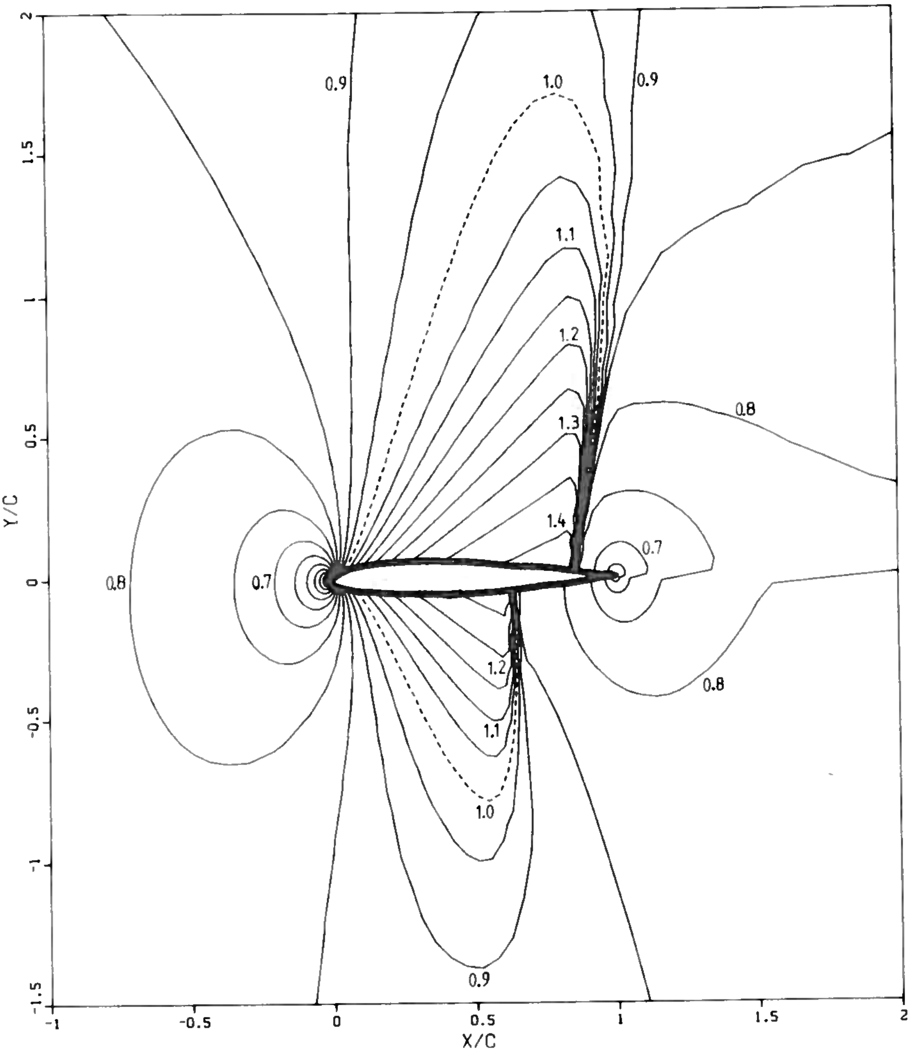
Eerste-orde-stelsel:	$N_1 = 0$
Tweede-orde-stelsel:	$N_2 = 0$
Defect:	$N_1 - N_2$
Los nu (iteratief) op:	$N_1' = N_1 - N_2$.
Gebruik hiervoor de nieuwe multiroostermethode.	

FIGUUR 2. *De methode van defect-correctie*

We gaan dit iteratief oplossen. We beginnen hier met in het rechterlid 0 neer te zetten en we lossen dan de onbekenden aan de linkerkant op. Dat is gewoon het stelsel wat we al hadden. De antwoorden voor de onbekenden zetten we aan de rechterkant erin en we lossen het stelsel opnieuw op. En dat herhalen we tot het convergeert, en dat doet het ook.

Als de oplossing nu geconvergeerd is, wat hebben we dan? Het convergeert omdat die N_1 en N'_1 eigenlijk hetzelfde zijn. Maar als dat zo is, dan heb ik eigenlijk $N_2 = 0$. Ik heb dus een oplossing van het tweede-orde stelsel, $N_2 = 0$. Dus naar de inhoud zijn we hier een tweede-orde stelsel aan het oplossen, maar als we naar de vorm kijken, dan zien we iedere keer rechts iets bekends staan en links het eerste-orde stelsel, dus naar de vorm zijn dit eerste-orde vergelijkingen. Hiermee heb ik aangetoond dat de wiskunde een prozaïsch gebeuren is, want als de wiskunde poëzie was, dan zouden vorm en inhoud één zijn, dat is hier dus niet zo.

Wat men in het algemeen doet is dit probleem twee-dimensionaal benaderen, dan stel je je voor dat die vleugel een oneindig lange cylinder is. De doorsnee is die van een vleugel, maar hij strekt zich in één richting oneindig uit (zie figuur 3). Dat is niet echt realistisch, het geeft wel redelijke antwoorden, maar niet echt de goede. Deze methode blijkt echter zo efficiënt te zijn dat deze het perspectief opent bij het ontwerpen van vliegtuigvleugels het probleem driedimensionaal door te rekenen.



FIGUUR 3. *Machgetallen berekend voor een testgeval; goede overeenstemming met bekende oplossing*

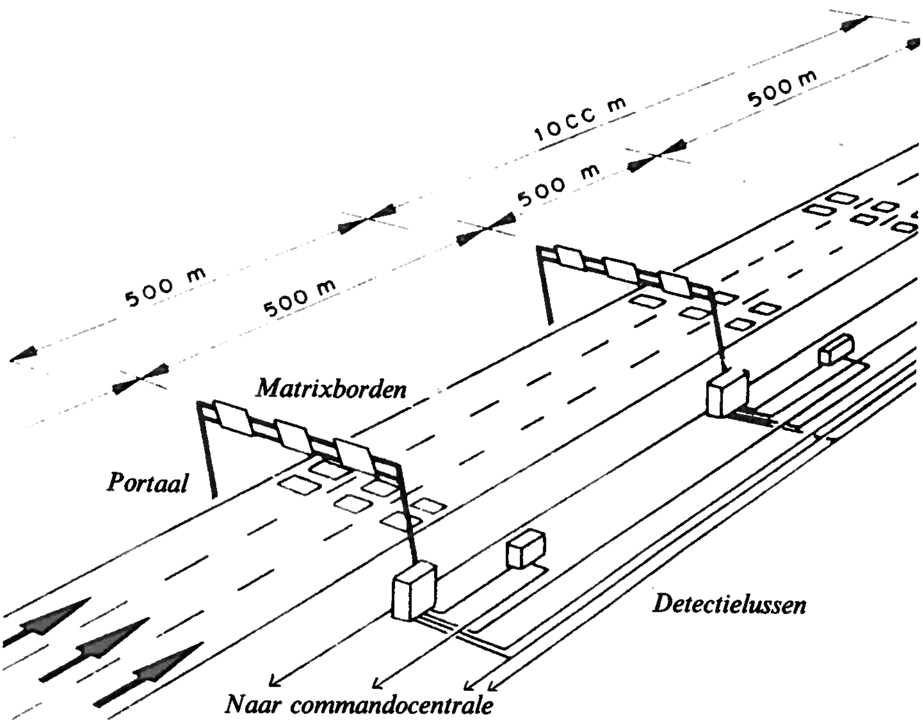
2. ADVIESSNELHEDEN

Het tweede geval was ook een STW-project, verricht in samenwerking met de Dienst Verkeerskunde van Rijkswaterstaat.

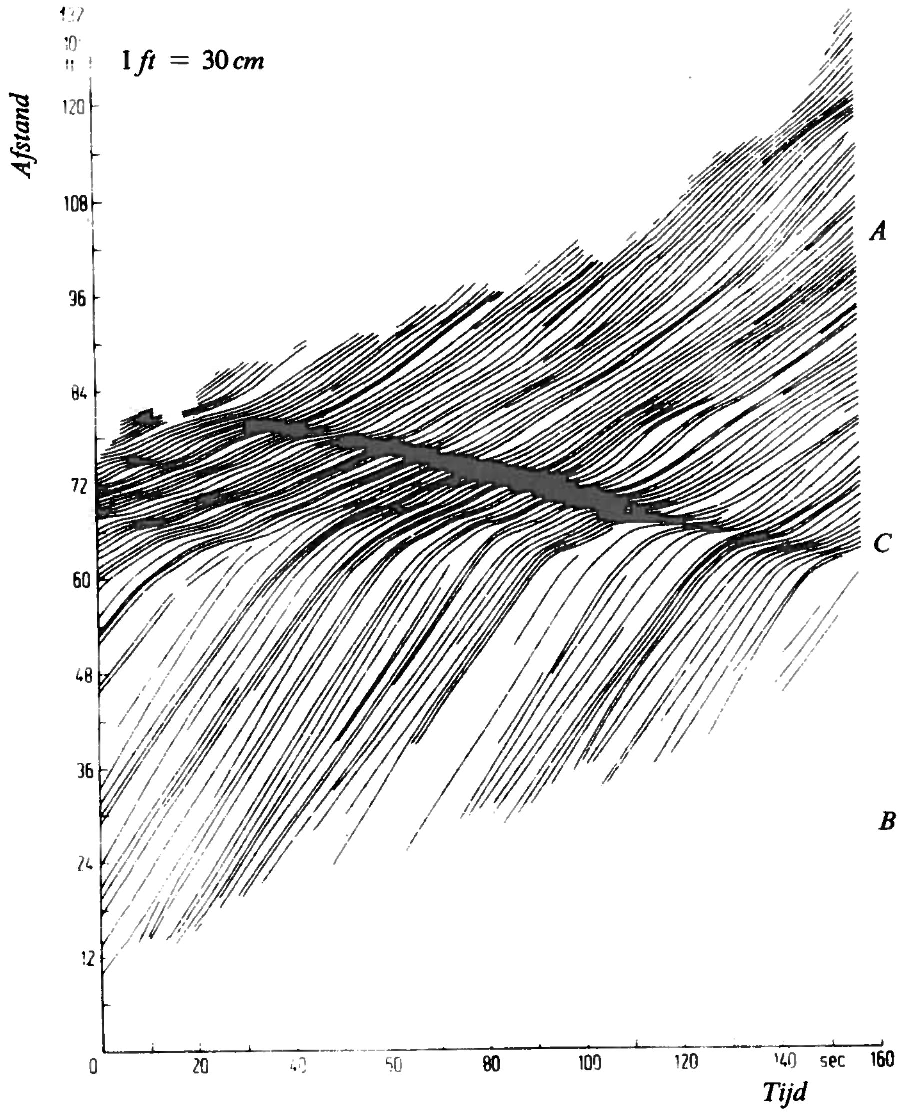
Als u zich wel eens op de Nederlandse snelwegen begeeft, dan heeft u vast wel eens van die 'matrixborden' gezien die op een soort portaalhouder boven de weg zijn gespannen. Daar staat dan op dat u een rijstrook wel of juist niet moet nemen en er staan ook adviessnelheden op. Wat u misschien niet weet is dat als u onder zo'n bord doorrijdt, u over een weg rijdt waar u gedetecteerd wordt (zie ook figuur 4). Er bevinden zich 'lussen' onder het wegdek die veranderingen in de magnetische flux kunnen constateren als er iets van metaal passeert en dat zal dan wel een voertuig zijn. Die gegevens worden doorgegeven aan processoren die langs de kant van de weg staan en die dat op hun beurt weer kunnen doorgeven aan centrale processoren. Er zijn dan operateurs die dat zien en op een gegeven ogenblik kunnen constateren dat er ergens niets meer langs komt, terwijl het ergens anders, bijvoorbeeld de rijbaan ernaast, juist heel erg druk is. Ze kunnen zo constateren dat er kennelijk een blokkade is en dan bijvoorbeeld rode kruisen opzetten en pijlen naar de andere rijbaan een eindje terug.

In feite gaat het hierbij in zekere zin nog om een proefproject. Het is nu operationeel in de buurt van Rotterdam en van Oudenrijn/Utrecht.

Het zou nu mooi zijn, als je dat detecteren niet alleen zou kunnen gebruiken om mensen naar een andere rijstrook te sturen als er een opstopping is, maar om van te voren zo'n opstopping te voorkomen door mensen tijdig het advies te geven wat langzamer te rijden.



FIGUUR 4. *Het signaleringssysteem*



FIGUUR 5. *Het ontstaan van een opstopping*

Hier is een plaatje uit de Amerikaanse literatuur dat iets laat zien over het ontstaan van een opstopping (zie figuur 5). Op de horizontale as is de tijd afgezet, op de verticale de positie. Ieder streepje is een voertuig. U ziet voertuigen betrekkelijk langzaam rijden (A) en een stroom van voertuigen (B) die met hoge snelheid daar op inrijden, op een gegeven moment moeten gaan afremmen en tot stilstand komen zodat een opstopping (C) ontstaat.

De probleemstelling is nu: we hebben een continue stroom van meetgegevens van de langskomende auto's en we willen adviessnelheden bepalen voor een optimale doorstroming. Dit is een moeilijk probleem. Laten we maar eens beginnen dat in een aantal deelproblemen te ontbinden.

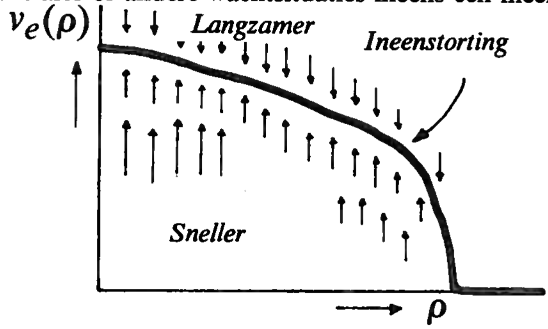
Het eerste deelprobleem is: bouw een model van hoe dat verkeer werkt. Het tweede is de bepaling van de modelparameters (parameter = variabele, grootheid) uit de gegevens die binnenkomen. Het derde is: hoe kan men op basis daarvan voorspellingen doen van wat er zal gebeuren? En dan het laatste probleem: bepaling van de strategie om dan de zaak te regelen.

Dit onderzoek is nu in voortgang en u zult zien dat we aan dit laatste punt nog niet echt zijn toegekomen.

Eerst de modellering. Er is een aantal redenen, die ik hier niet zal noemen, om dat niet per voertuig bij te gaan houden, maar daar een macroscopisch model voor te hanteren alsof er een min of meer homogene stroom over die weg rijdt, alsof die auto's een soort stroop zijn: een vloeistofachtig model waar dan stroming in plaatsvindt. Dan kun je elk baanvak of elke positie karakteriseren met twee parameters: de dichtheid van de stroom (ρ) en de stroomsnelheid (v). De doorstroming is het produkt van die twee parameters. Als je in een file zit, dan is daar de dichtheid heel hoog (zoals de Amerikanen dat plastisch uitdrukken: bumper to bumper), maar de snelheid is heel laag en daarmee het produkt, de doorstroming (ρv), ook.

Die twee grootheden variëren in de tijd en hangen op de een of andere manier af van de dichtheden en snelheden op andere plaatsen en tijden. De kunst is hiervoor wiskundige uitdrukkingen te vinden. Voor de dichtheid gaat dat heel gemakkelijk, dat is gewoon de simpele behoudswet dat er geen auto's opeens verdwijnen. Voor de snelheid is het wat ingewikkelder. Zelfs in spitssituaties heb je onderdelen waar de dichtheid laag is en snelheden hoog, e.d.

Drie effecten zijn, naar wij stellig vermoeden, voldoende voor een redelijke beschrijving van het verkeer. Allereerst het effect dat zich bij een gegeven dichtheid een snelheid instelt. Als de zaak erg dicht zit, dan gaan de auto's langzamer rijden. Is er niemand op de weg, dan haalt men een snelheid van 100 km per uur of misschien iets hoger. Er is dus een tendens om, als je onder die snelheid zit, op te trekken en boven die snelheid naar beneden te gaan. In een realistisch geval zal deze functie opeens instorten (zie figuur 6). Voor een bepaald bereik van de parameters kan de weg het niet meer aan, zoals je ook bij telefooncentrales of andere wachtsituaties ineens een ineenstorting krijgt.



FIGUUR 6. *Bij iedere dichtheid ρ hoort een evenwichtssnelheid $v_e(\rho)$*

Hierover is een heleboel bekend, maar het handigste is waarschijnlijk om dat gewoon zo uit de praktijksituatie te halen.

Ten tweede is er een effect dat de bestuurder zich niet alleen instelt op de directe voorganger, maar ook wat vooruitkijkt. Als ze zien dat het verkeer verderop optrekt of inhoudt, dan doen ze dat zelf ook. En dan is er een derde effect dat wel wat lijkt op de behoudswet: als er auto's het baanvak binnenrijden die bijvoorbeeld sneller rijden dan wat er al reed, dan stijgt daarmee de gemiddelde snelheid. Dat is dus een eenvoudige vergelijking.

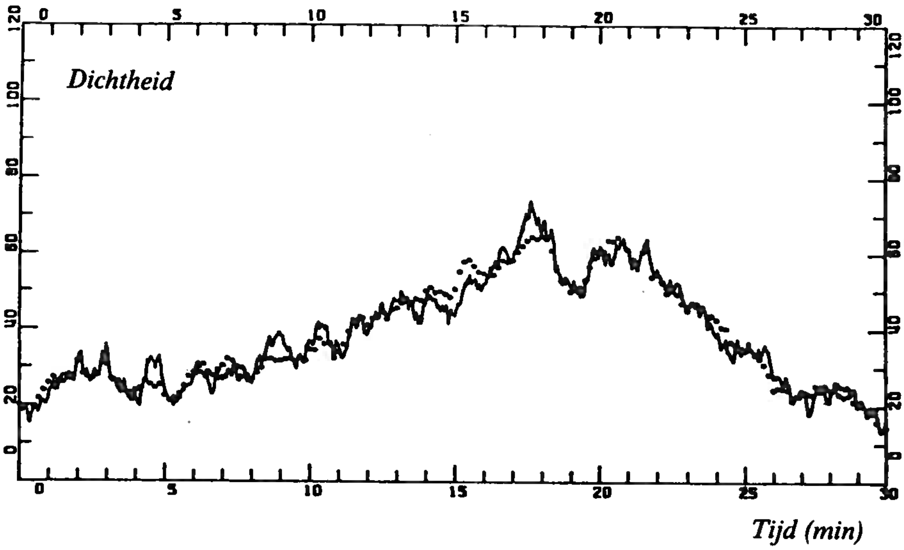
Met het verkregen model kunnen we al gaan voorspellen. We kunnen gewoon de tijd vooruit laten lopen en dan veranderen de dichtheid en de stroomsnelheid en weten we wat er gebeurt. Als dat onbegrensd nauwkeurig zou zijn, dan zouden we die sensoren langs de weg niet meer nodig hebben. Dan laten we gewoon dat model alles uitrekenen en dan weten we wat er op de weg gebeurt. Er zijn twee redenen waarom dat niet werkt. Eén is een nogal grove reden: het traject is maar begrensd en we weten niet wat er aan de ene kant binnenkomt, dus na een tijdje weet je niets meer. Een andere reden is dat het uiteraard een model is en niet het echte rijgedrag, bijvoorbeeld er zitten automobilisten tussen met individueel gedrag, bijvoorbeeld iemand die opeens remt zonder duidelijke reden en dergelijke. Dat soort dingen gebeurt gewoon. Dus moet je de parameterwaarden die je krijgt door de modelvoorspelling te nemen, later nog aanpassen bij wat er echt gebeurt. Daar kun je schattingstheorieën op toepassen en je kunt zelfs formules opstellen die je precies vertellen wat de optimale schatter is aan de hand van alles wat je gemeten hebt.

Er zijn twee redenen waarom we dat niet doen: een reden is dat het nogal ingewikkeld en dus duur is om uit te rekenen. Maar er is nog een heel andere belangrijke reden: je wordt te gevoelig voor detectiefouten, want er raken wel eens voertuigen zoek. Die detectoren hebben nu eenmaal een bepaalde gevoeligheid en als iets net op die grens van de gevoeligheid zit, bijvoorbeeld twee voertuigen die vlak achter elkaar rijden of iets dergelijks, dan zal de ene detector het voertuig misschien wel zien en de volgende net niet, en dan is er een voertuig verdwenen of komt er een voertuig bij.

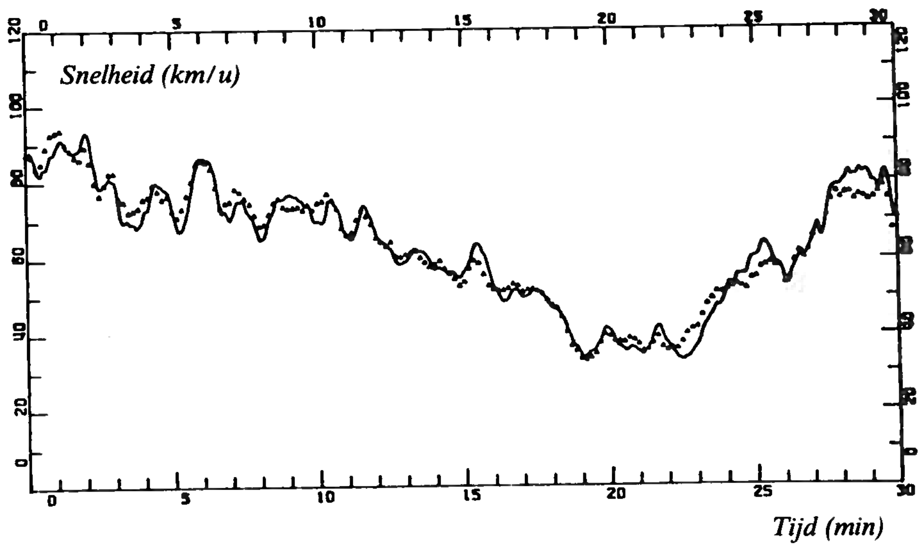
Het effect van die optimale schatter zou zijn dat als je echt uitgaat van wat die detectoren je melden en je hebt twee detectoren waarvan de één gevoeliger is dan de volgende, dan rijden er steeds voertuigen het baanvak binnen die het niet meer verlaten en dan zou dus het systeem na een tijdje denken dat er tientallen, honderden, duizenden voertuigen op dat baanvak zijn, die bovendien nog snel rijden ook. Dat is dan echt een reden om in paniek te raken, in modeltermen. Dat moeten we dus anders doen.

We weten bij een bepaalde detector hoeveel voertuigen er gepasseerd zijn. Als je daarvan de variatie in de tijd neemt, geeft je dat de intensiteit van het verkeer. Die kennen we ook uit het model, namelijk het produkt van ρ en v. Idealiter zouden die twee grootheden dus gelijk moeten zijn, maar dat zijn ze natuurlijk niet. Dan moet je naar het verschil gaan kijken, dat vertelt je dan hoe goed je model op dat moment de werkelijkheid weergeeft. Bouw nu in het model een correctieterm in, die op de een of andere manier de parameters ρ en v bijstuurt. De manier van bijsturing doet een beetje denken aan hoe je in de regeltheorie iets bijstelt. Wat hier bijgesteld wordt, is niet iets externs zoals de temperatuur, maar iets interns, nl. die parameters.

We hebben hier nu een adaptief model dat zich, ook als het er flink naast zit, toch weer bijstelt en dat ook nog vrij snel doet. In bijgaande figuur (zie de figuren 7a en b), ontleend aan een promotie-onderzoek in Nijmegen, blijkt dat zo'n model ook dit soort fluctuaties aardig kan bijhouden. De dichtheid komt hier overigens uit een simulatieprogramma.



FIGUUR 7a. *Dichtheid uitgezet tegen de tijd: simulatieresultaten (getrokken lijn) en geschatte waarden (punten)*



FIGUUR 7b. *Snelheid uitgezet tegen de tijd: simulatieresultaten (getrokken lijn) en geschatte waarden (punten)*

Tot slot nog iets over de regelstrategieën. Daar is nog geen onderzoek aan gedaan, maar het model geeft een aantal mogelijkheden aan voor wat je zou kunnen doen. Je kunt namelijk met een model voorspellen. Let even niet op wat er binnenkomt, maar reken een eindje door en dan zie je een opstopping ontstaan. Nou, je zou dat voorspellen kunnen doen met alternatieve snelheden en dan die combinatie kiezen die de beste doorstroming geeft. Dat zou nogal duur zijn om te doen, omdat er erg veel mogelijkheden zijn. Aan de andere kant heb je op een gegeven moment al de optimale snelheden ingesteld en dan hoef je alleen per geval kleine variaties daar in de buurt te bekijken.

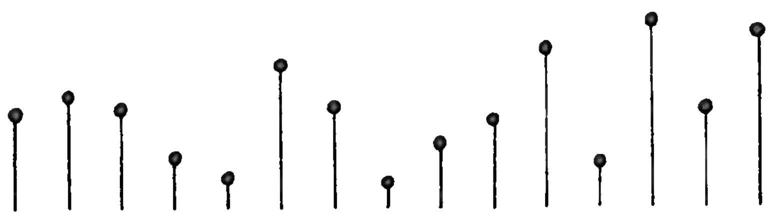
Een andere mogelijkheid, die waarschijnlijk qua rekenwerk veel beter uitkomt, is uit het model als het ware vooruitrekenen wat de optimale snelheden geweest zouden zijn en dan lijnen terugtrekken vanwaar de opstopping zich voordoet. Zelfs als je gewoon rechte lijnen neemt, krijg je al betere adviessnelheden dan wat er bekend is. Hier kan natuurlijk veel aan gesimuleerd worden en dat zal op een gegeven ogenblik ook in de praktijk bijgesteld moeten worden, omdat er een effect zal zijn dat we nu nog niet kennen: wat zal een automobilist zich aantrekken van het gegeven advies?

3. Basispeil

Het volgende onderwerp is weer in opdracht van Rijkswaterstaat, maar nu de 'natte' waterstaat, we gaan nu echt het water in. Een van de redenen waarom ik dit onderwerp leuk vind is dat dit in zekere zin een vervolg is op het al eerder op deze dag genoemde onderzoek aan de problematiek rond de Deltawerken na de waternoodsramp van 1953, waar hier op het Centrum erg veel werk aan is verricht, onder andere op statistisch gebied. Dit is een statistisch onderzoek. Het basispeil is gedefinieerd als dat peil van de buitenwaterstand dat gemiddeld precies eens in de tienduizend jaar wordt overschreden. En het probleem is om dat peil te schatten uit de bekende waarnemingen van de waterstanden.

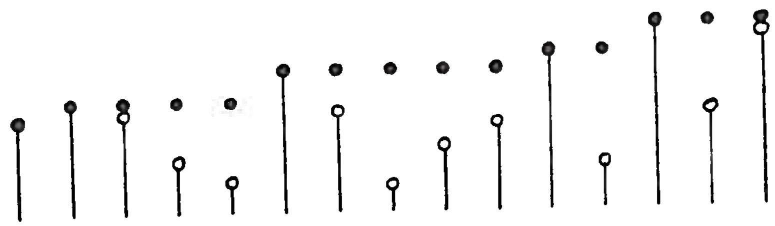
Daaraan is hier al eerder onderzoek verricht, maar er bleven een paar problemen liggen en om die reden heeft de Deltacommissie indertijd in haar eindrapport geadviseerd daar later een vervolgonderzoek voor op te starten, wat inmiddels begonnen is. Een der problemen was dat voor sommige gebieden de waarnemingsreeksen te kort waren om op grond daarvan uitkomsten te produceren. Een ander probleem is dat het gemiddelde niveau van de zeespiegel rijst en dat was niet in de eerdere berekeningen verdisconteerd - toen was het ook nog onvoldoende bekend - en zoiets geldt ook voor de getijverschillen, die ook door bepaalde effecten groter worden (dat zou ook verdisconteerd moeten worden).

We hebben nu dertig jaar meer gegevens. We hebben betere statistische methoden (daar gaat dit verhaal eigenlijk over) en, wat niet onbelangrijk is, we hebben meer rekencapaciteit. Want zonder dat zouden we ook met die betere statistische methoden weinig kunnen doen. Welke methode gebruik je nu voor iets dergelijks? Het heeft te maken met de extreme waarden in stochastische grootheden. We hebben een rij waarnemingen en nemen aan dat die getrokken zijn uit een bepaalde kansverdeling (zie figuur 8).



Figuur 8. *Een rij onafhankelijke waarnemingen met dezelfde kansverdeling*

Iedere waarneming is uit dezelfde kansverdeling getrokken en alle trekkingen zijn onafhankelijk. Dan kunnen we uit die gegevens een nieuwe rij gaan bepalen van waarden die tot dan toe het hoogst geweest waren, de recordhouders. De eerste waarde is natuurlijk altijd recordhouder. Als de tweede iets hoger is, neemt die het record over. De derde is iets lager en het record blijft op de tweede staan, enzovoorts. We krijgen hier dus een niet-afnemende rij (zie figuur 9).



FIGUUR 9. *De niet-afnemende rij van de op ieder moment tot dan hoogste opgetreden waarneming*

Volgens een recent resultaat uit de statistiek kun je zo'n rij zodanig omschalen dat je een nieuwe rij stochasten krijgt met een nieuwe kansverdeling die, als hij convergeert, een exponentiële vorm heeft. Er zit één parameter k in en afgezien van die parameter kunnen we, onafhankelijk van het type van de oorspronkelijke kansverdeling, iets zeggen over de kansverdeling van dat eindgeval. Voor het limietgeval $k \rightarrow 0$, krijgen we dan een dubbel exponentiële vorm (zie ook figuur 10). Deze functie is in feite gebruikt bij de studie die hier op het Centrum eerder is verricht, toen in het kader van het rapport van de Deltacommissie.

Als de kansverdeling van de record-rij convergeert (na een 'goed gekozen' normerende omschaling) heeft deze de vorm

$$G_k(x) = e^{-(1-kx)^{\frac{1}{k}}},$$

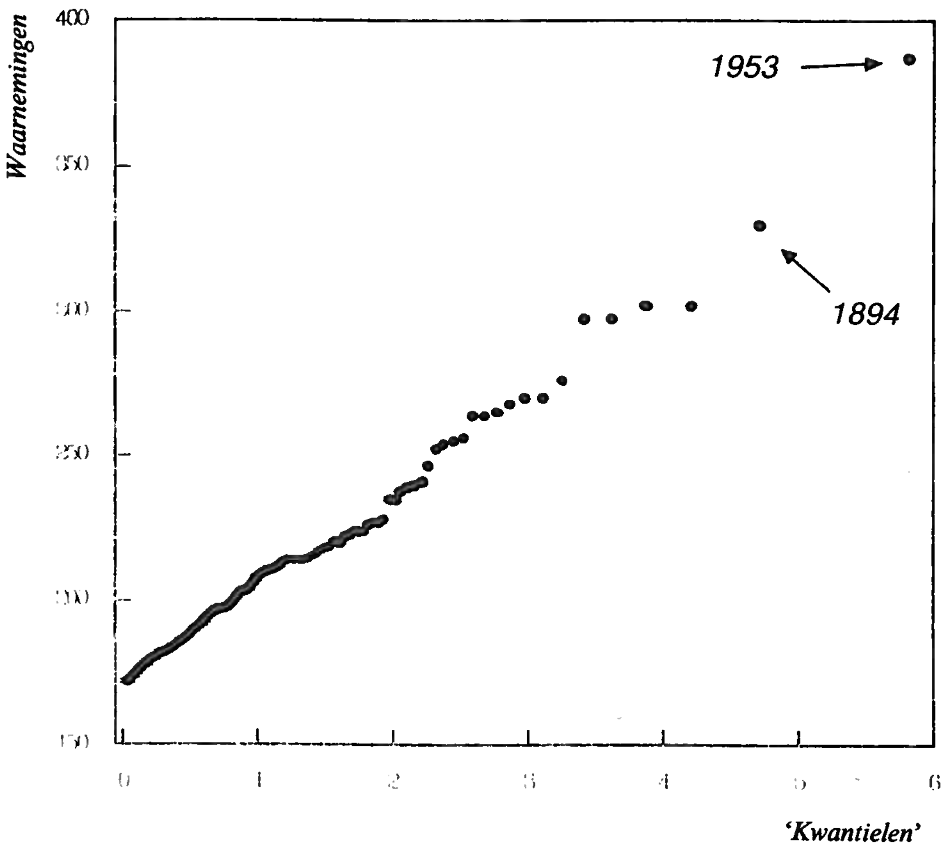
met als speciaal geval ($k \rightarrow 0$)

$$G_0(x) = e^{-e^{-x}}.$$

Deze laatste vorm is bij de studie voor het 'Deltarapport' gebruikt.

FIGUUR 10. *De exponentiële functies*

Waarom is toen $k = 0$ genomen? Om te beginnen was dit allemaal nog niet zo goed bekend, maar bovendien was er een reden om aan te nemen dat dit ook goed klopt, want je kunt een plaatje maken waar de waarnemingen zijn afgezet tegen de inverse van de kansverdeling van het bijbehorende 'kwantiel' voor het geval $k = 0$. Dat zou dan een rechte lijn moeten opleveren. U ziet dat het resultaat een rechte lijn vrij aardig benadert (zie figuur 11).



FIGUUR 11. *Bewerkte waarnemingen afgezet tegen (inverse) kansverdeling ($k=0$)*

Het probleem is echter dat er geen theoretische reden is dat $k = 0$ zou moeten zijn. U ziet in figuur 10 een echte uitschieter, dat was de ramp van 1953 en de op één na hoogste was 1894. Ik weet niet of dat een grote ramp was, maar dat was kennelijk toch een flinke uitschieter. Een probleem hierbij is dat je niet zeker weet dat het een rechte lijn is. Want stel bijvoorbeeld eens dat je 1953 niet weet, dan zou je wel eens kunnen denken dat het een aardige benadering is van een rechte lijn, maar die van 1953 ligt er dan echt boven. Maar als je nu alleen naar de hogere waarnemingen kijkt en daar een rechte lijn door legt, dan kloppen de lagere waarnemingen weer niet. Het feit dat er een knik in zit, is juist een bewijs dat k niet nul is. En als dat juist voor de hogere waarnemingen knikt, dan voorspel je behoorlijk verkeerd. Het is dus wel handig om ook iets te kunnen zeggen over die waarde van k.

Nu zijn er nog diverse complicaties, zoals: die hoge waterstanden die we meten, zijn niet onafhankelijk. Ze zijn niet gegarandeerd uit dezelfde kansverdeling getrokken, want het gedrag is 's zomers anders dan 's winters. Die problemen kun je oplossen door een flinke datareductie. Kijk nu eens alleen naar de winter, het seizoen waarin veel stormen optreden, veel depressies langs komen, dat vertelt je wel iets over de ergere gevallen. Pik daar dan waarnemingen uit die behoorlijk ver uiteenliggen, dan kun je redelijkerwijs aannemen dat dat onafhankelijke verdelingen zijn. En die traditionele methode, die ook bij het eerdere onderzoek is gebruikt, dient dan alleen om de jaarmaxima te bekijken. En dat werkt goed wanneer je weet wat k is, want dan heb je wel genoeg gegevens. Maar als je niet weet wat k is, dan heb je eigenlijk te veel gegevens weggegooid om nog te kunnen schatten. Daarom is een moderne schattingsmethode toegepast. Kies op een slimme manier een drempel en kijk naar alle waarnemingen die daar boven liggen. Daarover kun je dan ook weer een uitspraak doen wat betreft de kansverdeling. Je kunt daarvoor een formule opstellen die alleen goed is voor de hoge waarden en daar gaat het hier vooral om. Met behulp van die nieuwe kansverdeling kun je nu op grond van meer gegevens waarden gaan schatten. Daar komt een aantal dingen uit. Ten eerste dat inderdaad k vrij dicht bij nul ligt, maar niet echt nul is. Je krijgt dan een andere schatting van het basispeil, dat komt ongeveer een meter lager uit. Aan de andere kant heb je in beide gevallen een betrouwbaarheidsinterval waar je als statisticus rekening mee moet houden. Dat komt ongeveer aan weerszijden een meter groter uit, op grond van het feit dat je ook die k zit te schatten, dus al met al maakt dat voor het eindadvies weinig uit.

Uit het onderzoek is ook naar voren gekomen dat er nog een aantal niet verwaarloosbare effecten is, zoals het feit dat het maansbaanvlak in de ecliptica schommelt.

Het onderzoek wordt nog voortgezet. Men kijkt bijvoorbeeld of het mogelijk is om speciaal voor deze verdeling efficiëntere schatters voor k op te stellen, want op dit moment is het met de grootste aannemelijkheid geschat. Heel nieuw is het gebruik van meer-dimensionale extrematheorie, waar onder andere het onderzoek van De Haan en Resnick betrekking op had.

Het maakt een aanzienlijk verschil of die kansen waar het over gaat betrekking hebben op een overschrijding op één plaats, dat er zeg maar één dijk wordt overspoeld, of dat het over de gehele kust in gelijke mate gebeurt. Dat maakt economisch ook een groot verschil. En het is handig als je daar iets over kunt zeggen. Dat onderzoek zal doorgaan, met correcties voor een aantal effecten, zoals ik net al noemde van bijvoorbeeld het maansbaanvlak.

4. Gefaseerde omschakeling acceptgiro-apparatuur

Goed, nu duiken we een geheel andere wereld in. We zijn weer op het droge: acceptgiro-apparatuur. U hebt misschien gemerkt dat de postcheque- en -girodienst, nu Postbank geheten, aan het overschakelen is van stevige kaarten op slappe formulieren. Er worden nogal wat acceptgirokaarten verstuurd, zo'n 100 miljoen per jaar, door een duizendtal grote aanmakers (incassanten). De grootste zijn natuurlijk wel veel groter dan de kleinste van die duizend. Stel nu eens dat alle incassanten tegelijk zouden overgaan op slappe formulieren, dan zou de PTT ineens overal de apparatuur moeten vervangen. Dat wilde men natuurlijk niet, om allerlei redenen. Ten eerste zou dat een gigantische investering ineens zijn. Ten tweede haal je dan de kinderziekten er niet uit en moet je ook nog al die mensen opleiden om de apparatuur te bedienen.

De postcheque- en -girodienst wilde dus gefaseerd verwerkingsapparatuur gaan inschakelen. Men moest dan ook gefaseerd die incassanten toelaten tot het gebruik van slappe formulieren. De incassanten wilden echter natuurlijk wel in één keer overschakelen en niet half de oude apparatuur gebruiken en half de nieuwe, dat zou niet praktisch geweest zijn. Er moest dus een schema komen van wanneer welke incassant aan de beurt zou zijn.

Nu zou je kunnen zeggen: eerst de eerste, dan de tweede, enz. Maar het probleem is dat verschillende incassanten een heel verschillend profiel kunnen vertonen wat betreft het aanbod van die kaarten. Bij een boekverzendhuis bijvoorbeeld zal dat vermoedelijk allemaal min of meer gelijkmatig gaan, alleen in de vakantiemaanden wordt het wat minder, en rond Sinterklaas en Kerstmis is er een hausse. Maar een instelling als de ANWB heeft diverse diensten die in één keer acceptgirokaarten aan de leden versturen. Daarna duurt het voor sommigen enige tijd voordat ze het formulier insturen, het aanbod gaat dus niet zo direct naar beneden. Dan komt er nog een herinnering of zoiets. Dan is het weer vakantie. Misschien nog een derde herinnering en volgend jaar is het weer hetzelfde profiel.

Dit is één complicatie. Een tweede is dat de PCGD niet een draaiboek wilde hebben, maar een methode om zelf dat draaiboek op te kunnen stellen. Verder wilden de klanten allemaal graag op die nieuwe apparatuur overschakelen, maar sommigen konden daar niet mee wachten, omdat ze anders nog een vernieuwde versie van de oude apparatuur hadden moeten kopen. Anderen daarentegen wilden juist liever even wachten omdat er nog mensen getraind moesten worden in het gebruik van die apparatuur.

In ieder geval, gegeven enerzijds de groeiende capaciteit van de dienst als functie van de tijd en anderzijds de profielen van de incassanten en hun individuele wensen, was de probleemstelling een methode op te stellen, die ervoor zorgt dat het aanbod van de toegelaten incassanten niet de verwerkingscapaciteit van dat ogenblik zou overschrijden, niet nu en niet in de toekomst. Je zou dat gemakkelijk kunnen realiseren door iedereen pas helemaal aan het eind toe te laten, als alle capaciteit er is. Maar dat was niet de bedoeling: de overcapaciteit zou zo laag mogelijk gehouden moeten worden. Bovendien moest ook nog met de individuele wensen rekening gehouden worden.

Nu is er wel een methode om onder deze voorwaarden het optimale draaiboek op te stellen, maar die methode is echter te complex. Niet in wiskundige zin, want het is gewoon een lineair programmeringsprobleempje, maar het zou te duur worden om uit te rekenen. Daarom is gekozen voor een heuristische methode, in dit geval in twee fasen: begin met een soort benadering en verbeter die dan. De eerste fase gaat als volgt. Ieder van die incassanten had een voorkeursdatum. Stel nu eens dat dat ook de invoeringsdatum zou kunnen zijn.

Je krijgt dan een bepaald patroon, van de gewenste capaciteitstoename in de tijd. Als dat zou passen binnen het werkelijke capaciteitspatroon, dan zijn we klaar. In de praktijk past dat natuurlijk niet. We schuiven ze dan allemaal bijvoorbeeld een maand naar achteren. Misschien past het dan nog niet, dan schuiven we ze nog eens een maand op, net zo lang totdat het wel past. Dat is dan de eerste benadering.

In fase twee kijken we naar de eerlijkheid. Er is altijd wel iets oneerlijks aan als je moet vertragen, want iedereen had graag eerder gewild en voor de een is vertraging erger dan voor de ander. Kijken we nu naar wie er het slechtst van afkomt en nemen we dat even als maatstaf. Het is duidelijk dat het dan niet beter kan dan we hier al bereikt hebben. Er moet altijd iemand minstens met dat bedrag vertraagd worden. Want stel eens dat ze allemaal naar voren geschoven zouden kunnen worden, in een andere oplossing. Dan zou ik de achterste dus ook iets naar voren kunnen schuiven. Maar die achterste die pas later zou zijn ingevoerd, heeft geen invloed op wat er met de vorige gebeurt. Dan kan ik dus de voorlaatste ook iets naar voren halen, enzovoorts. Dan had ik dus in de eerste fase een ander antwoord gekregen. Nu kunnen we dit nog verbeteren, omdat sommige mensen wel degelijk naar voren zullen kunnen. Een incassant die naar voren kan, in de zin van dat het wat hem betreft en wat betreft de capaciteit kan, noemen we 'vervroegbaar'. Neem van de vervroegbare incassanten degenen die maximaal vertraagd zijn en kies daaruit degene die het minste beslag legt op de capaciteit in die periode waarin we proberen te vervroegen. Deze incassant zetten we iets naar voren toe en dat herhalen we tot er niemand meer vervroegbaar is.

Met deze methode is experimenteel vastgesteld dat dit resultaten gaf die de optimale zeer goed benaderen en razendsnel tot stand komen. Je kunt gewoon even wat veranderen, experimenteren en je krijgt meteen weer een antwoord. Een extra voordeel voor de PTT was dat het ook achteraf altijd mogelijk is het draaiboek bij te stellen als een incassant zou zeggen: sorry, ik ben niet op tijd klaar daarmee, kan het niet later? Dan zouden ze het even opnieuw kunnen draaien en een andere incassant kunnen vragen: jij zou vroeger kunnen, wil je dat?

5. Het weer op grote schaal (dynamica van luchtstroming)

Van het volgende probleem weet ik niet goed of het nat of droog is, maar het gaat over het weer op grote schaal. Het zal u duidelijk worden waar dat 'grote schaal' op slaat. Dit is een STW-project in samenwerking met het KNMI. Het gaat om luchtstromingen.

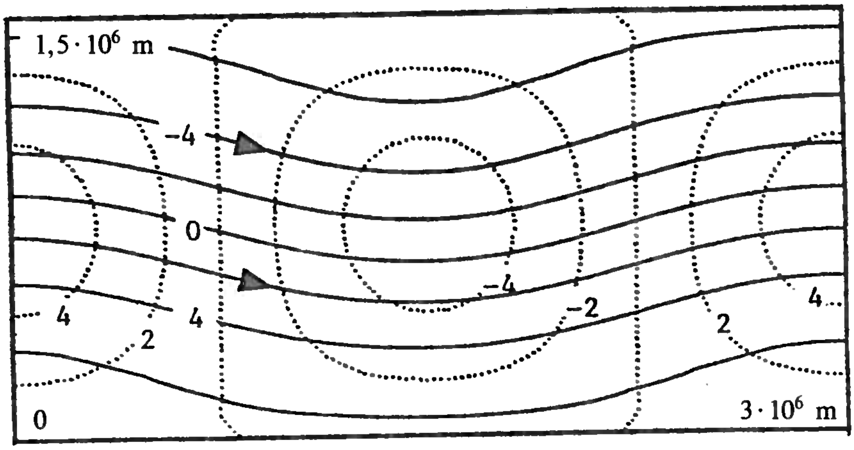
Van het KNMI moeten we weliswaar 'verwachten' zeggen in plaats van 'voorspellen', maar ik zal daar toch af en toe tegen zondigen. Aan het voorspellen van het weer zijn bepaalde grenzen. Eén grens is dat, als je wilt vooruitrekenen, je op iedere plek precies zou moeten weten hoe de wind staat, hoe warm het is en dat soort dingen meer. Maar er is slechts een beperkt aantal meetpunten met een beperkt aantal meetwaarden. Er is een tijd geweest dat we dachten dat als we dat nu maar genoeg zouden uitbreiden, we op een gegeven ogenblik zouden kunnen zeggen wat voor weer het in het jaar 2000 zal zijn.

Dat blijkt echter niet het geval te zijn en niet alleen omdat de computer die dat zou moeten uitrekenen zoveel warmte produceert dat daardoor alleen al het weer wordt verstoord. Nee, ook al zouden we die computer aan de andere kant van de maan zetten, dan zou het probleem er nog zijn. Het systeem van het weer is essentieel chaotisch, turbulent. Je kunt dat, hoe precies je het ook weet, op een gegeven ogenblik niet zo doorrekenen dat je het na een tijdje nog steeds precies weet. Die grens ligt op een vrij korte tijd (enkele weken) in de toekomst. Ik klap nu in mijn handen. Misschien had ik dat niet moeten doen. Het kan namelijk het verschil zijn of er over twee weken een depressie boven IJsland is of niet, want die verstoring van de atmosfeer, dat microscopische effect, kan, hoe onwaarschijnlijk het ook lijkt, macroscopische gevolgen hebben en daar is niets aan te doen. Dat kun je natuurlijk nooit allemaal doorrekenen.

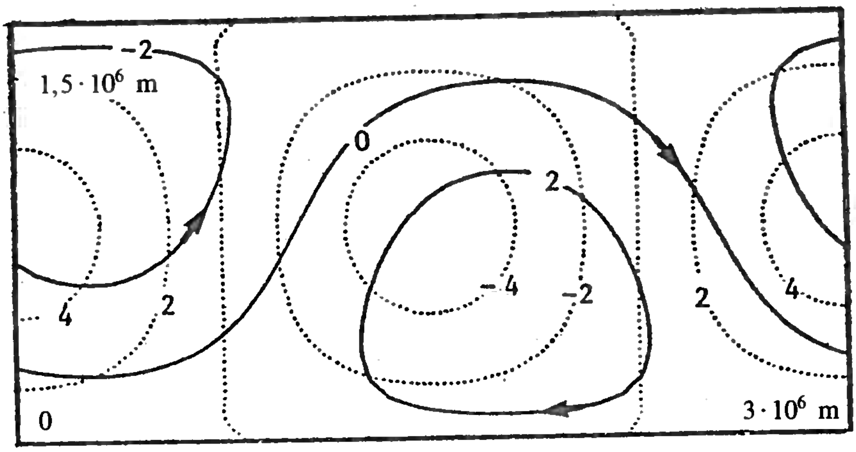
Er is ook een praktisch probleem bij het rekenen: je moet namelijk weer op roosterpunten gaan rekenen. Dat hebben we al eerder gezien. Dat zou je eigenlijk heel fijn moeten doen, zoals we al met dat handenklappen hebben gezien, maar dat fijne is meteen duur. Daarom was de gedachte: neem een heel ander model dan het roostermodel, neem een spectraalmodel. Dat betekent dat je bepaalde fijne dingen nog wel kunt modelleren zonder dat het extra duur wordt en het is tegelijk ook geschikt - het zal nog blijken waarom dat interessant is - om grootschalige effecten te bestuderen en nieuwe theorieën toe te passen. Bij de roosterpunten is dat niet speciaal gemakkelijk.

Waar komt dat spectrale model vandaan? Als ik denk aan geluidstrillingen of zoiets, dan is bekend dat je dat kunt beschouwen als een lineaire optelsom van trillingen van bepaalde frequenties en krijg je een spectrum. Iets dergelijks kun je ook doen met zo'n systeem als waar het hier om gaat. Dat is weliswaar een niet-lineair systeem, maar toch kun je iets analoogs doen. Alleen heet het dan niet optellen, maar er is de een of andere operator in het stelsel en daar bepaal je dan van wat de 'eigenfuncties' zijn. Die geluidstrillingen zijn ook eigenfuncties. Bepaalde eigenfuncties hebben coëfficiënten die in de tijd veranderen en daarvoor krijg je een stelsel vergelijkingen. In principe gaat het hier om een oneindig aantal coëfficiënten, een oneindig aantal eigenfuncties. Daarmee kun je niets doen. Daarom haal je als het ware de hoge frequenties eruit en kijk je alleen naar wat lagere frequenties.

Die lage frequenties zijn nu juist van belang voor de grootschalige weerseffecten, althans op beperkte termijn, want langer dan 14 dagen wordt problematisch. Het blijkt dat er een soort evenwichtssituaties zijn, stabiele weertypen, die niet echt stabiel zijn, maar het een tijdje volhouden. Die komen uit het model rollen met een iets vereenvoudigde aanname over de realiteit. Je krijgt een straalstroom die nu eens rustig golvend loopt, dan weer grote golven maakt en soms gaat de stroom circuleren. Dat is precies het verschil tussen wisselvallig weer en mooi weer. In het ene geval hebben al die depressies vrije doortocht en krijgen we ze over ons heen, in het andere geval worden ze omgeleid, doordat er vanwege de circulatie een soort blokkade van effecten van buiten ontstaat. Er ontwikkelt zich een hogedrukgebied met bijbehorend mooi en stabiel weer. Die situaties kunnen alle twee vrij lang aanhouden en dan opeens verspringen. Zie ook figuur 12 en figuur 13.



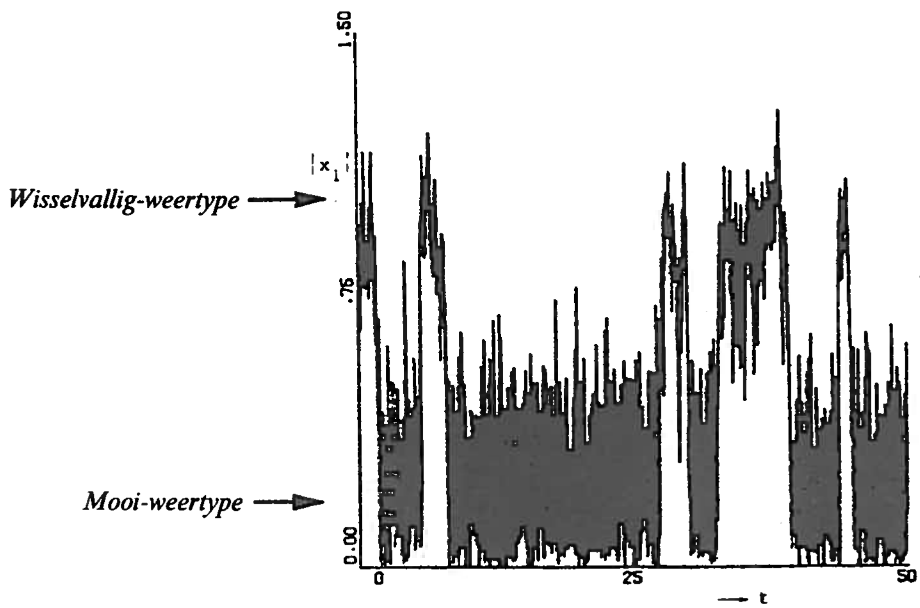
FIGUUR 12. *Wisselvallig-weertype: overtrekkende depressies*



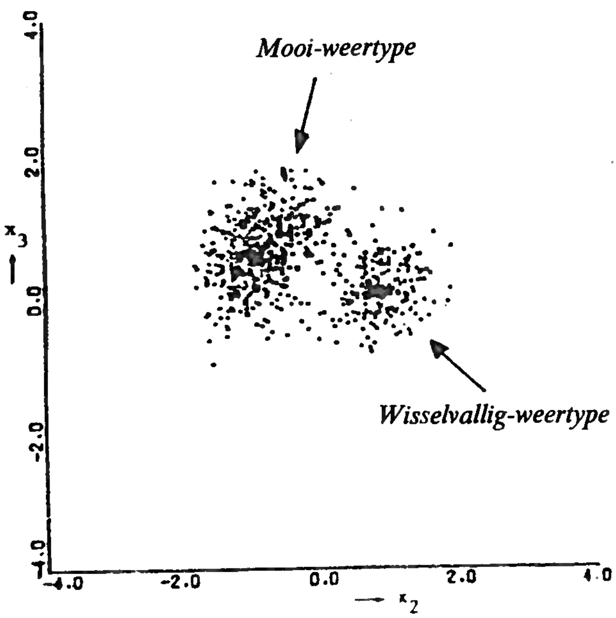
FIGUUR 13. *Mooi-weertype: hoge-drukgebied, depressies worden omgeleid*

Maar we hebben ook nog de hoge frequenties. Die zorgen juist voor het chaotische en onvoorspelbare van het weer. En het blijkt dat het model dat we hier hebben al bij een vrij lage waarde van n - het aantal eigenfuncties, te beginnen bij de lage frequenties - zich chaotisch gaat gedragen. Daar kun je dan nieuwe theorieën op loslaten. De wetenschappelijke wereld is de laatste jaren op zijn kop gezet door de ontdekking dat je met zulke eenvoudige systemen - want voor lage waarden van n krijg je hier eenvoudige systemen- chaotische verschijnselen kunt modelleren. Je kunt zelfs echt analytisch gaan kijken, dus met potlood en papier zal ik maar zeggen. Het lukt ons nu al tot $n = 20$ te gaan, wat al een hele tour de force is. Eerst leek $n = 6$ al knap. En met numerieke methoden lukt het ons in ieder geval wel tot $n = 100$. Ik zeg steeds 'ons', maar ik ben niet degene die dat allemaal heeft gedaan, dat zult u inmiddels wel begrepen hebben. Ik heb deze uiteenlopende verzameling zo bijeengesprokkeld in dit gebouw.

Wil je nu goede overeenstemming hebben met de werkelijkheid, dan kun je iets terug doen voor de staart die je afkapt, voorbij die 100 bijvoorbeeld, en dat vervangen door ruis met een geschikt spectrum of iets dergelijks. Daardoor krijg je dan iets wat kwalitatief beter op de werkelijkheid aansluit. Dat is ook echt iets nieuws, z.g. stochastische differentiaalvergelijkingen, maar daar hebben we theorieën over ontwikkeld en daar kun je dus wat aan doen. Een heel simpel model met $n = 3$ bijvoorbeeld is niet echt realistisch, maar voeg je ruis toe, dan kun je opeens verschijnselen zien die kloppen met wat je verwacht. Je ziet dat het systeem af en toe in de ene toestand verkeert en dan weer in de andere. Die komen overeen met het mooie en het wisselvallige weertype (zie figuur 14). Je ziet dat het opeens kan omslaan en weer terug. In een fasediagram (zie figuur 15) van de twee andere coëfficiënten uit het stelsel zijn ook kleine clusters te zien die heel erg lijken op het soort fasediagram dat je ook krijgt met dynamisch-chaotische systemen. Die ruis geeft hier dus vrij aardig dat chaotische karakter weer.



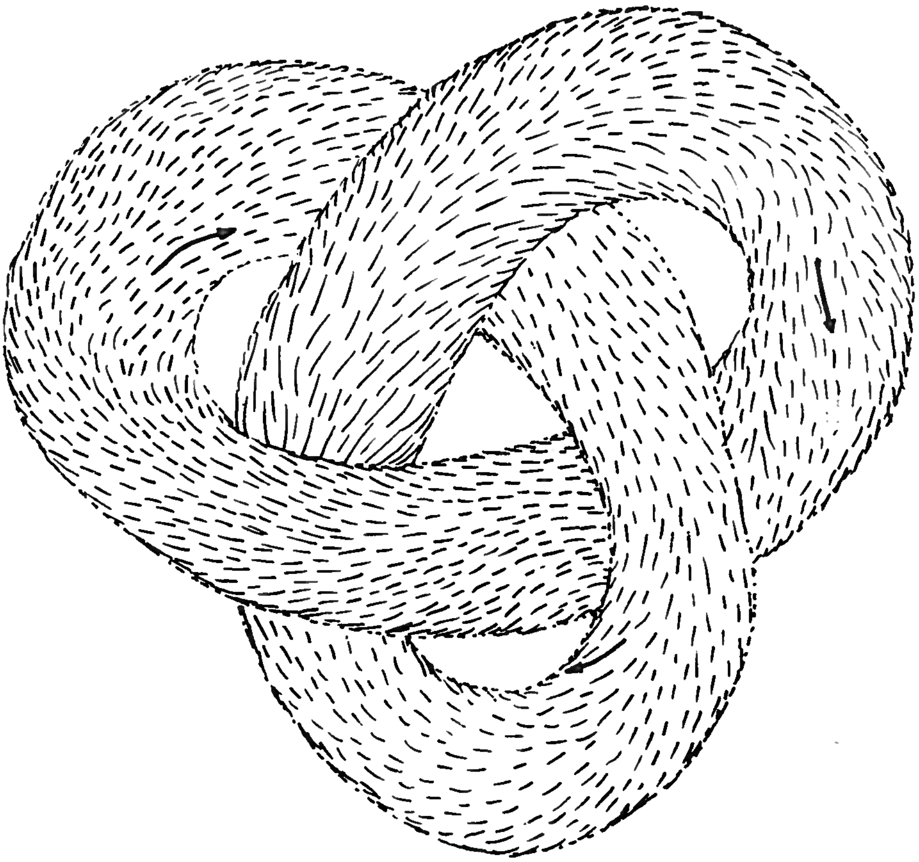
FIGUUR 14. *Dynamisch gedrag voor $n = 3$ met toegevoegde ruis*



FIGUUR 15. *Fasediagram*

In de toekomst willen we de theorie van de chaotische dynamica hierop toepassen. Dat zou een methode zijn om - en daar gaat het in zekere zin eigenlijk om - niet zo zeer het weer op lange of middellange termijn beter te voorspellen, want dat kan nu eenmaal niet, maar om daarbij aan te kunnen geven hoe betrouwbaar het is.

In een fasediagram kun je overal pijltjes denken waarvan de richting door het systeem bepaald is (zie ook figuur 16). Zo'n systeem begint dan te lopen en volgt dan onvermijdelijk die richtingen. De vraag is wat er gebeurt met een iets andere beginpositie. De mate waarin de respectievelijke paden uiteenwijken bij de voorspelling is een indicatie voor de betrouwbaarheid van je uitkomst. Daarover is door Lyapunov een theorie ontwikkeld.



FIGUUR 16. *Fasediagram met pijltjes*

6. HET SCHALEN VAN LETTERVORMEN

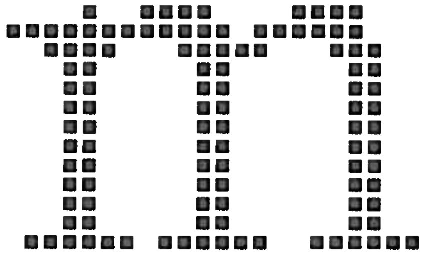
Dan ben ik nu aan het laatste geval gekomen. Dat gaat over het schalen van lettervormen. Dat was een interne opdracht, d.w.z. de belangstellende zat hier in huis en degene die het onderzoek deed ook, maar dat waren niet dezelfde personen.

Hier heb ik een stukje zetwerk (zie figuur 17) dat ik geplukt heb van de stapel weggegooid zetwerk. Dat is hier in huis geproduceerd. We hebben hier tekstverwerkingsapparatuur, maar ook apparatuur om te fotozetten. U ziet dat er nogal wat fouten in staan. Er staat hier bijvoorbeeld het woord 'epsilon', maar dat had de Griekse letter 'ϵ' moeten zijn. Zo staan er nog legio fouten in. Nu is het niet altijd zo slecht. Ik heb dit stukje speciaal uitgezocht, omdat er zoveel fouten bij elkaar stonden, maar het is nu eenmaal een realiteit dat als je een beetje ingewikkeld zetwerk maakt, met formules en dergelijke, daar nu eenmaal vrij veel fouten in voorkomen en dat geeft extra correctieslagen. Als dat iedere keer via die fotozetter moet kost dat veel tijd, want je krijgt dat gemiddeld maar één keer per dag terug en bovendien zijn die extra correctieslagen duur, zowel in computertijd als in de ontwikkeling op die fotozetter.

ι polynomial $P(X)$, we have $\vdash P(t)=0$. By inspe(
we see that each axiom $\vdash L=\mathbb{R}$ used in the deriv:
such that $L[\epsilon]=\mathbb{R}[\epsilon]$ in $\mathbb{C}$ in a neighbourhood (
then for the equalities derived as elementary trut
ɔsilon $]=P(t[$epsilon$]J)=0$. The polynomial $P(X)$
ion of X, since it would then be the trivial poly
:radiction: since t is mobile, $t[$epsilon$]$ assumes with
values, and only constant polynomials are insens
ıeir argument.
ımediately the elusiveness, and therefore relative t(
ɔf such terms as e, π, $\log(2)$, $e^{e^2}-2$, $\cos(5)-cos(8)$ -
It is also not hard to see that $\mathrm{CET}_{\mathrm{C}}$ even implies
of e^{e^2} and e, an open question. The method is
l $e^{\pi}\sqrt{163}$, since these terms are immobile (but e
elusiveness for immobile terms without re

FIGUUR 17. *Zetwerk met fouten*

Daarom was de gedachte: kunnen we niet degene die moet proeflezen, dat bijvoorbeeld op het computerscherm laten zien, of anders via een goedkoper uitvoermedium als een laserprinter? Dat kan natuurlijk met die nieuwe uitvoertechnologieën. Daarmee kun je willekeurige lettervormen maken door ze in puntjes op te bouwen. Ik hoop dat u kunt zien dat hier een 'm' staat, uit vierkantjes opgebouwd (zie figuur 18).

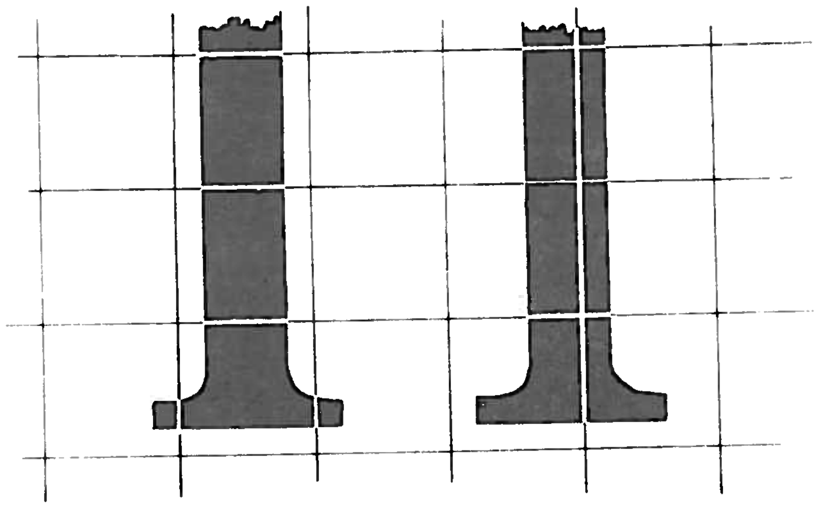


FIGUUR 18. *De letter 'm' opgebouwd uit vierkantjes*

Daarmee kwam echter weer een nieuw probleem. We hebben nu al die lettervormen en die moeten op de een of andere manier geschaald worden op een in feite veel grovere resolutie. Dan zijn er twee problemen. Ten eerste : hoe doe je dat? Welke methode, welke algoritme gebruik je daarvoor? Ten tweede: wat doe je dan met de uitkomsten van die algoritme? Moet je al die matrices die je berekent, in het geheugen op gaan slaan? We werken hier namelijk met een 35-tal lettertypen. Dat is misschien wat veel, maar die blijken gewenst of nodig te zijn. In sommige wiskundige theorieën geef je bepaalde grootheden bijvoorbeeld weer met Gotische letters. En er zijn 135 tekens per type. Ook dat lijkt nogal veel, maar je komt al gauw zo ver. Naast letters en cijfers zijn er tekens voor een half, een procent, ligaturen, een ï (bij een gewone i een puntje zetten komt niet mooi uit), een omgekeerd dakje, een Duitse 'Ringel-ess', verwijzingstekens, enz. Uiteindelijk kom je daarmee op zo'n 135 tekens per type uit. Dan zijn er nog zo'n 25 corpshoogten, die je nodig hebt voor indices, superscripts, indices van superscripts, en dergelijke. En dan is er nog een vijftal uitvoerapparaten, ieder met hun eigen schaal.

35	*Lettertypen*
	(A *A* **A** 𝔄 · · ·)
± 135	*tekens per type*
	(3½ % Søffiïčß†)
25	*corpshoogten*
	(M M M M M M M M)
5	*uitvoerapparaten*
	×
± 600,000	*'gevallen'*

FIGUUR 19.



FIGUUR 20. Een simplistische schalingsmethode

Dat alles tezamen levert ongeveer 600.000 gevallen en gemiddeld komt de bitmap per geval op zo'n 5000 bytes uit. Dat zou dan 3 miljard bytes geweest zijn en dat was wat veel om op te slaan. Zie ook figuur 19.

Wat kunnen we daaraan doen? Eerst bekijken we een eenvoudige, om niet te zeggen simplistische schalingsmethode. Uit het feit dat het simplistisch is, voelt u waarschijnlijk al dat het niet goed zal werken. Je probeert eerst iets simpels en als het dan niet werkt is het simplistisch. Hier heb ik een zwarte lettervorm waar ik een raster overheen leg (zie figuur 20). Laten we eens per hokje (de rastergrootte van het uitvoerapparaat) kijken of er meer wit of meer zwart in zit. Wat grotendeels zwart is wordt helemaal zwart, en zo ook voor wit. Je hebt dan echter kans dat zo de hele poot van een letter verdwijnt. Nu is dit ook wel heel erg grof geschaald natuurlijk en je zou kunnen hopen dat deze methode met een wat fijnere schaling goed uitkomt. Dat blijkt niet echt zo te zijn. Neem bijvoorbeeld het lettertype Times Roman. Dat heb ik gekozen omdat het een moeilijk lettertype is met dikke en dunne gedeelten. Hier ziet u het woord 'Times' in de meest gebruikte corpshoogte en 'Roman' in de corpshoogte die dan voor superscripts en indices gebruikt zou worden (zie figuur 21). Hier zijn

FIGUUR 21. *Simplistisch geschaalde vormen*

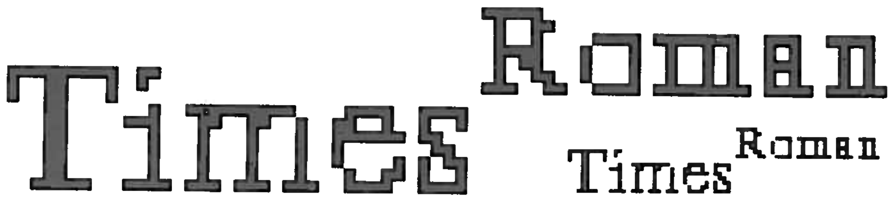
ze geschaald zoals ze er voor een goedkoper type laserprinter uit zouden zien. Dat is nog wel te lezen. Maar daaronder ziet u hoe het er op een scherm uit zou zien. En hier heb ik het nog eens heel klein gezet, dan ziet u het ongeveer zoals het er in werkelijkheid uit zou zien. U zult het met me eens zijn dat dat niet bevredigend is.

Nu zou iemand die dit met de hand zou doen - maar dat kan natuurlijk niet voor al die 600.000 gevallen - zich wel realiseren dat dit een pootje is en dan hier een aantal blokjes zwart maken. Analyseer de letter nu eens in termen van streepjes of streken van een kwast - dat idee is misschien opgekomen terwijl iemand naar de Chinese les op de TV zat te kijken - die in dikte varieert. Voor een dun pootje gebruiken we een dun kwastje en hier voor zo'n forse streek gebruiken we een forse kwast. Op die manier kun je die letter analyseren als opgebouwd uit streken. Dan kun je daaraan iets uitrekenen, dat is ook al bekend uit computer graphics. Dat wordt echter zeer duur als je uitgaat van een ronde kwast, wat het eerste idee was. Maar daarna kwam het tweede idee: doen alsof die kwast vierkant is, waardoor een streek dan een rechthoekje wordt. Dat blijkt dan opeens heel gemakkelijk uit te rekenen te zijn. De werkwijze wordt dan als volgt. Je hebt die lettervorm. Bepaal nu de verzameling van maximale rechthoeken - d.w.z. die niet passen in een nog grotere rechthoek - die die vorm samen overdekken. Dat is uniek gedefinieerd. Dit lijkt wel ingewikkeld, maar het kan razendsnel gebeuren. Schaal dan de afmetingen van die rechthoeken om naar dat grovere raster, zonder te kijken naar waar ze moeten staan. Schaal dan vervolgens de posities van die rechthoeken om. Dat streepje is er dan dus al en daarna kijken we waar het terecht komt.

Deze werkwijze heeft een aantal algoritmische voordelen, ook qua toepassing. Het omschalen kan namelijk zo snel gebeuren dat je die maximale rechthoeken vooraf kunt bepalen en dan het omschalen pas kan laten plaatsvinden op het ogenblik dat het apparaat die vorm nodig heeft. Je hoeft dus die bitmatrices helemaal niet meer op te slaan. Je hoeft alleen maar éénmalig die collectie van 35 $\times$ 135 gevallen op te slaan. En de representatie in termen van die rechthoeken blijkt nog minder ruimte in te nemen dan de oorspronkelijke representatie.

Hier zijn de resultaten voor diezelfde twee gevallen. Times Roman zoals die er op die goedkopere laserprinter (zie figuur 22) en op het scherm (zie figuur 23) uit zouden zien. U ziet: het is misschien nog niet ideaal; met de hand zou het beter zijn gegaan, maar voor de toepassing is dit in ieder geval bevredigend. We zijn nu bezig dit te implementeren, zodat het ook gebruikt kan worden en daarna gaan we pas nadenken of het misschien nog iets beter kan. Wat gebeurt er namelijk? U ziet hier dat de 'n' van onderen helemaal dichtloopt. Dat is geen onoverkomelijk bezwaar. Als u ernaar kijkt, ziet u dat het de leesbaarheid niet aantast, maar het zou wel iets mooier kunnen. U ziet ook nog wel een 'a' staan, ook al is ook die dichtgelopen. Maar wat gebeurt er als die kwast heel dun wordt? Dan wordt hij altijd naar minstens één hokje vertaald en dat is ook wel nodig, maar als het nu alleen om een uiterste puntje gaat, zou je misschien kunnen zeggen: laat maar weg. En dat zou misschien nog een verbetering kunnen geven.

FIGUUR 22. *Tekst omgeschaald voor laserprinter met grove resolutie*



FIGUUR 23. *Tekst omgeschaald voor scherm met zeer grove resolutie*

Daarmee ben ik in feite gekomen aan het einde van mijn verhaal. Ik heb geprobeerd het eenvoudig te presenteren en misschien denkt u: dat kan mijn kleine zusje ook. Dat weet ik natuurlijk niet, want ik ken uw kleine zusje niet. Als zij dat kan, dan kunnen wij haar hier een baan aanbieden.

Hoe het ook zij, wat ik er zelf in feite van heb opgestoken is het best onder woorden te brengen met het verhaal van die reparateur die op bezoek kwam bij het een of ander apparaat dat het niet deed. Hij gaf er een klapje tegenaan en het apparaat deed het weer. Toen schreef hij een rekening uit van *f*135,-. De klant natuurlijk boos, want de reparateur had er alleen een klapje tegen gegeven. De man zei: 'Ik zal de rekening specificeren: klapje uitdelen *f*5,-, weten waar te klappen *f*130,-.' In ons geval is het niet het probleem te weten waar de juiste klap uit te delen, maar wat ik gezien heb in deze voorbeelden is dat het de kunst is te weten hoe je zo tegen een moeilijk probleem aan moet kijken dat het er dan opeens simpel uitziet.